Teoria miary i całki
WPPT IIr. semestr zimowy 2009/10
LISTA 3

20/10/09

Na początek trzy ćwiczenia z wykładu:

Ćwiczenie 1
Jeśli A jest odcinkiem początkowym w $(X, \leq)$, to albo $A = X$ albo $A = \{x \in X : x < a\}$ dla pewnego $a \in X$.

Ćwiczenie 2
Jeśli A jest odcinkiem początkowym w $(X, \leq)$, to A jest dobrze uporządkowany (porządkiem $\leq$ obciętym do $A \times A$).

Ćwiczenie 3
Jeśli A jest odcinkiem początkowym w $(X, \leq)$ i B jest odcinkiem początkowym w $(A, \leq)$, to B jest odcinkiem początkowym w $(X, \leq)$.

Dalsze zadania:

Zadanie 4*
Jeśli $(A, \leq)$ i $(B, \preccurlyeq)$ są zbiorami dobrze uporządkowanymi, to albo $(A, \leq)$ jest izomorficzny z pewnym odcinkiem początkowym w $(B, \preccurlyeq)$, albo na odwrót. (Skonstruuj izomorfizm f.)

ROZWIĄZANIE: Niech $\mathfrak{F}$ będzie rodziną wszystkich izomorfizmów pomiędzy odcinkami początkowymi w A i w B. Każde $f \in \mathfrak{F}$ ma swoją dziedzinę A_f i obraz B_f, które są odcinkami początkowymi w A i B, odpowiednio. Rodzina ta jest niepusta, gdyż zawiera funkcję $f_0 : A_0 \to B_0$, gdzie $A_0 = \{\min A\}$ $B_0 = \{\min B\}$ i $f_0(\min A) = \min B$. Teraz czas na mały lemacik.

Lemat: Jeśli $f, g \in \mathfrak{F}$ oraz $A_f \subset A_g$ to na A_f mamy $f = g$.

Dowód: Załóżmy, że zbiór O tych $x \in A_f$, że $f(x) \neq g(x)$ jest niepusty. Niech x_0 oznacza minimum tego zbioru. Niech A_1 oznacza odcinek początkowy $\{x : x < x_0\}$ (to może być zbiór pusty). Na tym zbiorze $f = g$ zatem i obrazy są te same, powiedzmy B_1 (to też może być zbiór pusty). Ponieważ f jest izomorfizmem, więc B_1 jest odcinkiem początkowym w B_f, a zatem i w B. Rozważmy $f(x_0)$ i $g(x_0)$. Są to oczywiście punkty spoza B_1. Pokażemy, że zarówno $f(x_0)$ jak i $g(x_0)$ są równe $\min B_1^c$ (dopełnienie w B). Gdyby bowiem istniał punkt $y \in B_1^c$ mniejszy od $f(x_0)$, to skoro $f(x_0) \in B_f$ i B_f jest odcinkiem początkowym, to $y \in B_f$. Zatem istnieje $x = f^{-1}(y)$ i $x < x_0$ (bo f^{-1} zachowuje porządek oraz $x_0 = f^{-1}(f(x_0))$). Z tego wynika, że $x \in A_1$, ale wtedy $y = f(x) \in B_1$, sprzeczność. Identycznie pokazuje się, że $g(x_0) = \min B_1^c$. Czyli mamy $g(x_0) = f(x_0)$, a więc zgodnie z definicją O, $x_0 \notin O$. Sprzeczność, bo x_0 był wybrany jako $\min O$. To kończy dowód lematu.

Dalej. Jest oczywiste, że zbiór $A_{\mathfrak{F}} = \bigcup_{f \in \mathfrak{F}} A_f$, jako suma odcinków początkowych jest odcinkiem początkowym. Określmy na nim funkcję h (o obrazie w B) wzorem $h(x) = f(x)$, gdzie $x \in A_f$. Na mocy lematu definicja ta nie zależy od wyboru f jeśli x należy do A_f dla różnych f. Tak określona funkcja jest izomorfizmem na swój obraz: jeśli $x < y$ są w $A_{\mathfrak{F}}$, to bierzemy takie f aby $y \in A_f$. Wtedy to również $x \in A_f$ oraz $h = f$ na A_f, więc $h(x) = f(x) < f(y) = h(y)$. To daje różnowartościowość i zachowywanie porządku, czyli izomorfizm na obraz. Obraz $h(A_{\mathfrak{F}})$ jest sumą obrazów $f(A_f)$, zatem też jest odcinkiem początkowym. To oznacza, że funkcja h należy do rodziny $\mathfrak{F}$. Wystarczy teraz pokazać, że albo $A_{\mathfrak{F}} = A$ albo jego obraz $h(A_{\mathfrak{F}}) = B$. Gdyby bowiem tak nie było, to można by do-określić h w punkcie $x_0 = \min A_{\mathfrak{F}}^c$ jako $\min(h(A_{\mathfrak{F}}))^c$ i mielibyśmy izomorfizm (co się bardzo łatwo sprawdza) określony na odcinku początkowym $A_{\mathfrak{F}} \cup \{x_0\}$ istotnie większym od $A_{\mathfrak{F}}$ i obrazie też będącym odcinkiem początkowym (ten obraz to $h(A_{\mathfrak{F}}) \cup \{\min(h(A_{\mathfrak{F}}))^c\}$). To przeczy definicji zbioru $A_{\mathfrak{F}}$. Koniec rozwiązania.

Zadanie 5
Jeśli $(A, \leq)$ jest izomorficzny z pewnym odcinkiem początkowym w $(B, \preccurlyeq)$ i na odwrót, to $(A, \leq)$ jest izomorficzny z $(B, \preccurlyeq)$.

Zadanie 6
Uzasadnij dlaczego nie istnieje nieskończony malejący ciąg liczb porządkowych.

Zadanie 7
Dla niepustej rodziny $\mathcal{A}$ podzbiorów przestrzeni X skonstuować rodzinę monotoniczną generowaną przez $\mathcal{A}$.
Wsk. Wzorować się na konstrukcji sigma-ciała z wykładu.

Zadanie 8
Podobnie skonstuować ciało i pierścień generowane przez $\mathcal{A}$. (Tym razem wystarczy zwykła indukcja po liczbach naturalnych. Dlaczego nie wystarczyła ona w przypadku sigma-ciała czy rodziny monotonicznej?)

Zadanie 9
Dana jest przestrzeń mierzalna $(X, \mathcal{F})$ z miarą skończoną μ i pewna podrodzina $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$. Udowodnij (przez indukcję pozaskończoną), że jeśli każdy zbiór z $\mathcal{F}$ o mierze dodatniej zawiera zbiór z $\mathcal{A}$ o mierze dodatniej, to istnieje rozłączny ciąg zbiorów $A_n \in \mathcal{A}$ taki, że $\mu(\bigcup_n A_n) = \mu(X)$.
Wsk. Konstruować indukcjnie kolejne zbiory $A_\alpha \in \mathcal{A}$ rozłączne z poprzednimi, aż to co zostanie poza nimi osiągnie miarę zero. Uzasadnić, że indukcja ta nie wyjdzie poza liczby kardynalne przeliczalne. Przenumerować otrzymane zbiory.